

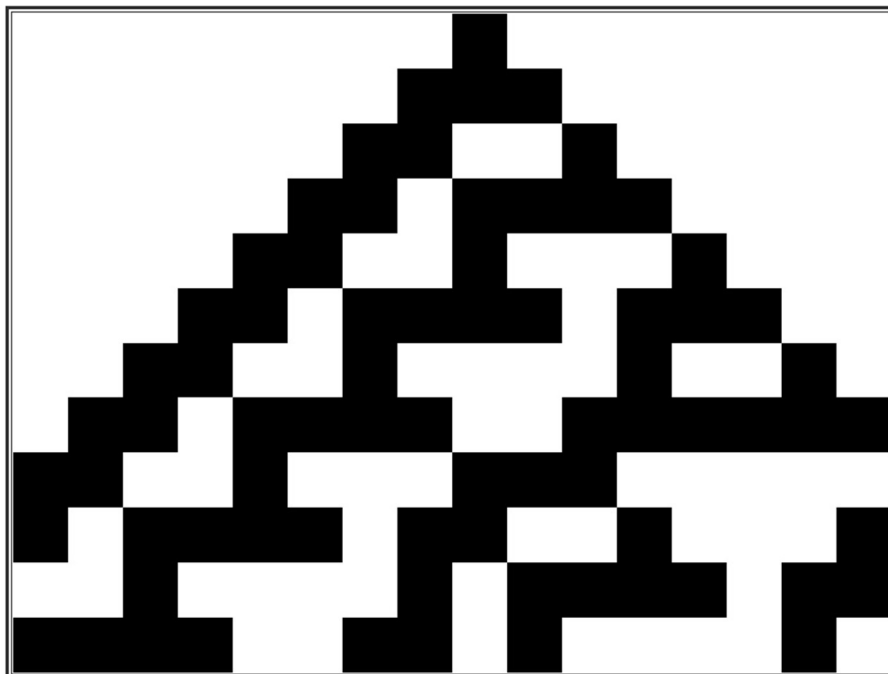
Phasenübergänge bei polykontextualen semiotischen Automaten

1. Zelluläre Automaten sind eine Form von autoreproduktiven Automaten (vgl. von Neumann 1966), die zuerst von John H. Conway entdeckt wurden (vgl. Gardner 1970). Ein CA (cellular automata) ist im kanonischen Falle ein Pattern aus 4 Plätzen, die belegt („lebendig“) oder unbelegt („tot“) sein können. CAs werden somit durch $2^8 = 256$ Regeln bestimmt, durch deren fortgesetzte Anwendung fraktalartige Gebilde entstehen; vgl. als Beispiel den CA der Regel 30, den wir in drei verschiedenen Pixelgrößen zeigen (erzeugt durch <http://kidojo.com/cellauto/generate.cgi>)

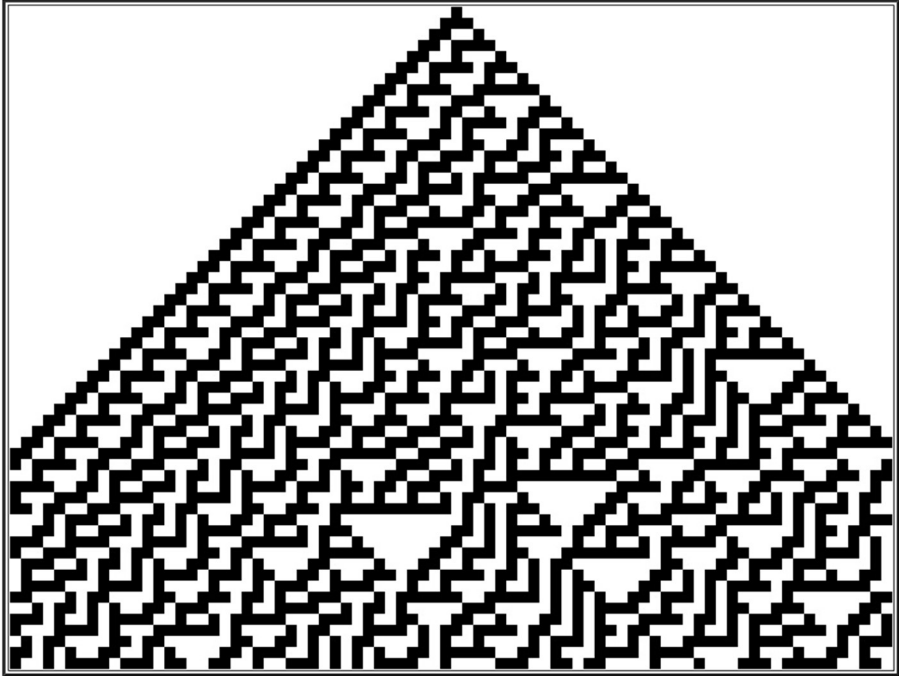
The image below was created using this set of rules:

									= 30 (Decimal)
0	0	0	1	1	1	1	0		

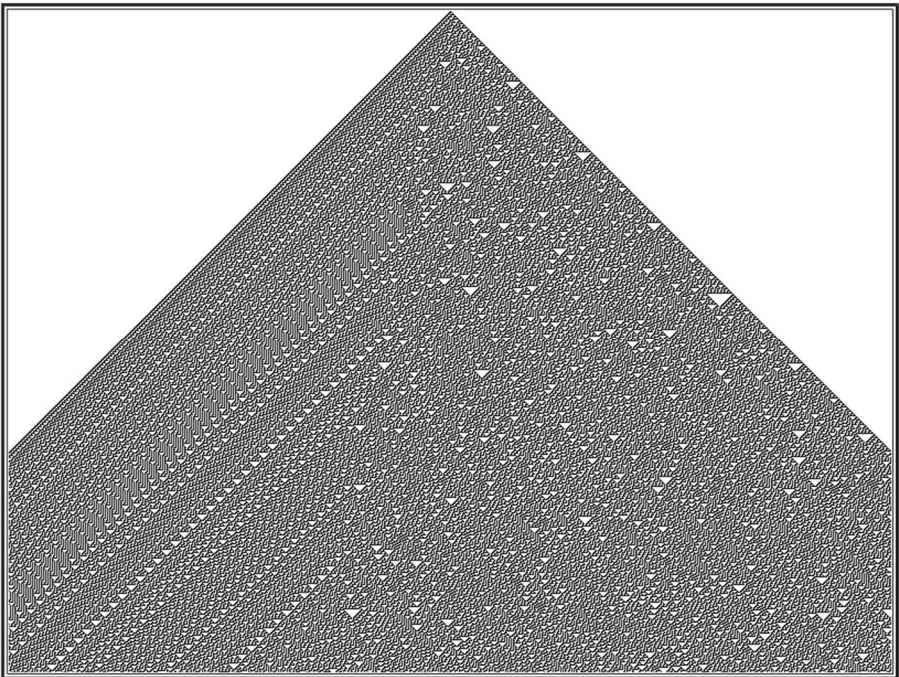
Rule (0-255) Mandatory	Image Width (0-1024)	Image Height (0-768)	Pixel Size (1-50)	Image Format	Random Top Line
30	800	600	50	jpg	☐



Rule (0-255) Mandatory	Image Width (0-1024)	Image Height (0-768)	Pixel Size (1-50)	Image Format	Random Top Line
30	800	600	10	jpg ▾	☐



Rule (0-255) Mandatory	Image Width (0-1024)	Image Height (0-768)	Pixel Size (1-50)	Image Format	Random Top Line
30	800	600	1	jpg ▾	☐



Je größer die Pixelgröße gewählt wird, desto besser werden also die Einzelschritte des mit herkömmlichen CAs simulierbaren oder rekonstruierbaren dynamischen Wachstums (qualitativer!) Objekte darstellbar. Was man hingegen nur mit Simulationen (und cdfs) darstellen kann, ist das zeitlich stark beschleunigte Wachstum selbst. Es sei hier ein Vergleich mit dem Film gestattet. Die obigen Aufnahmen sind „Stills“, erst durch die Animation würde daraus ein Film, aber selbst dann würden die Übergänge zwischen den Zuständen der CAs nicht sichtbar. Bei rein quantitativen CAs kann man bis heute keine „Phasenübergänge“ mathematisch präzise beschreiben.

3. Eine besondere Stellung innerhalb der qualitativen CAs nehmen nun die semiotischen ein. Vor allem ist die kanonische Restriktion auf 4 Plätze optional. Behält man sie bei, wie wir es bisher getan haben, so gilt es also, 6 Elemente (Subzeichen) auf 4 Plätze zu verteilen. Man erhält damit $\binom{6}{4} = 360$ qualitative CAs (vgl. Toth 2019a-e). Bei diesen kann man aber, anders als bei den quantitativen CAs, die Phasenübergänge durch die in Toth (2019d) definierten qualitativen semiotischen Morphismen für jedes Subzeichen $z \in Z^{2,3}$ formal präzise darstellen. Man erhält dadurch also sozusagen die Möglichkeit, nicht nur die Stills, sondern auch die Übergänge zwischen ihnen in einer nicht-dynamischen Beschreibung darzustellen. Das in Toth (2019d) erarbeitete allgemeine Schema ist

α	-	-	-	-
$\beta\alpha$	$\beta-$	-	-	-
$\gamma\beta\alpha$	$\gamma\beta-$	$\gamma--$	-	-
$\delta\gamma\beta\alpha$	$\delta\gamma\beta-$	$\delta\gamma--$	$\delta---$	-
$\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$	$\varepsilon\delta\gamma\beta-$	$\varepsilon\delta\gamma--$	$\varepsilon\delta---$	$\varepsilon----$

Da CAs, wie bereits einleitend bemerkt, zu den autoreproduktiven Automaten gehören, besitzen sie verschiedene Formen von Rückkopplungen, die im folgenden, beschränkt auf die outputs der semiotischen CAs, durch Unterstreichung angedeutet werden.

3.1. R = (0, 00, 01, 000)

$$\begin{array}{lll}
(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} & (\gamma \beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} & (\beta^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \\
(\gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} & (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} & (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} \\
(\beta \alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} & (\gamma \beta \alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} & (\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \gamma \beta \alpha) \rightarrow \alpha \\
(\gamma \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} & (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \beta \alpha) \rightarrow \alpha & (\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ} \\
(\alpha \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \beta & (\gamma \beta \alpha \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ & (\alpha^\circ \rightarrow \gamma \beta \alpha) \rightarrow \beta \alpha \\
(\gamma \beta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \gamma^\circ & (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\beta \alpha} & (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\beta} \\
(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\gamma \beta} & (\beta \alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma} & (\alpha^\circ \rightarrow \beta \alpha) \rightarrow \underline{\gamma \beta \alpha} \\
(\beta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma} & (\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\gamma \beta \alpha} & (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\gamma \beta}
\end{array}$$

3.2. R = (0, 00, 01, 001)

$$\begin{array}{lll}
(\beta \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} & (\delta \gamma \beta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} & (\beta^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \\
(\delta \gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} & (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} & (\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} \\
(\beta \alpha \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} & (\delta \gamma \beta \alpha \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} & (\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta \alpha) \rightarrow \alpha
\end{array}$$

$$(\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \alpha \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \beta \quad (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\alpha^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ (\alpha^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\alpha \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\alpha^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta} \quad (\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\delta\gamma} \quad (\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\delta\gamma} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha} \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta}$$

3.3. R = (0, 00, 01, 012)

$$(\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ}$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha$$

$$(\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \alpha (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$(\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\alpha (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma} \quad (\alpha^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\beta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma \beta \alpha} \quad (\beta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma \beta}$$

3.4. R = (0, 00, 000, 001)

$$(\gamma \beta \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} \quad (\delta \gamma \beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ}$$

$$(\delta \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \quad (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ}$$

$$(\gamma \beta \alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} \quad (\delta \gamma \beta \alpha \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$(\delta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma \beta \alpha) \rightarrow \alpha \quad (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \gamma \beta \quad (\delta \gamma \beta \alpha \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\alpha^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta \alpha) \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ$$

$$(\delta \gamma \beta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma \beta \alpha \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \gamma \beta$$

$$(\alpha \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta} \quad (\gamma \beta \alpha \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\alpha^\circ \rightarrow \gamma \beta \alpha) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta \alpha}$$

$$(\gamma \beta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta \alpha} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta}$$

3.5. R = (0, 00, 000, 012)

$$(\gamma \beta \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} \quad (\varepsilon \delta \gamma \beta \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \varepsilon \delta \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ}$$

$$(\varepsilon \delta \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \quad (\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ}$$

$$(\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha$$

$$(\varepsilon\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\gamma\beta} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\gamma\beta\alpha}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma\beta\alpha \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \beta$$

$$(\alpha, \gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\alpha^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

3.6. R = (0, 00, 001, 012)

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ}$$

$$(\varepsilon \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha$$

$$(\varepsilon \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \alpha \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \varepsilon^\circ \quad (\alpha^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha} (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

$$(\alpha \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\alpha^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha} (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

$$3.7. R = (0, 01, 000, 001)$$

$$(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ} \quad (\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ}$$

$$(\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \quad (\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ}$$

$$(\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ} \quad (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$(\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha \quad (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ}$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \underline{\gamma} \quad (\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\gamma\beta\alpha}$$

$$(\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\gamma\beta\alpha} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma}$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\delta\gamma} \quad (\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta\alpha} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\delta\gamma}$$

3.8. R = (0, 01, 000, 012)

$$(\gamma \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ}$$

$$(\varepsilon\delta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ}$$

$$(\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$(\varepsilon\delta \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ}$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\gamma} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\gamma\beta\alpha}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\gamma\beta\alpha} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma}$$

$$(\beta\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma} \quad (\gamma\beta\alpha \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta\alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha}$$

$$(\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta\alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha} \quad (\gamma \rightarrow \alpha^\circ\beta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma}$$

3.9. R = (0, 01, 001, 012)

$$(\delta\gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ}$$

$$(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\alpha^\circ\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha) \rightarrow \beta\alpha$$

$$(\delta \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma \beta \alpha) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma \beta \alpha} \quad (\delta^\circ \rightarrow \alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta}$$

3.11. R = (00, 01, 000, 001)

$$(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} \quad (\delta \gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ}$$

$$(\delta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} \quad (\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ}$$

$$(\gamma \beta \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ} \quad (\delta \gamma \beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \beta$$

$$(\delta \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \beta \quad (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \gamma$$

$$(\beta \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\gamma} \quad (\delta \gamma \beta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\beta^\circ \rightarrow \delta \gamma \beta) \rightarrow \underline{\gamma \beta}$$

$$(\delta \gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \delta^\circ \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\gamma \beta} \quad (\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma}$$

$$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\delta \gamma} \quad (\gamma \beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\beta^\circ \rightarrow \gamma \beta) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta}$$

$$(\gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\delta \gamma \beta} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\delta \gamma}$$

3.12. R = (00, 01, 000, 012)

$$(\gamma \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} \quad (\varepsilon \delta \gamma \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon \delta \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ}$$

$$(\varepsilon \delta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} \quad (\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ}$$

$$(\gamma\beta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta$$

$$(\varepsilon\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \beta \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ}$$

$$(\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\gamma} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\gamma\beta}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\gamma\beta} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma}$$

$$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma} \quad (\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

$$(\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma}$$

3.13. R = (00, 01, 001, 012)

$$(\delta\gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ}$$

$$(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \underline{\beta^\circ} \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \beta$$

$$(\varepsilon \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \beta \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\beta \rightarrow \varepsilon\delta\gamma) \rightarrow \underline{\delta\gamma} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta}$$

$$(\varepsilon\delta\gamma \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\delta\gamma}$$

$$(\beta \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma} \quad (\delta\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\beta^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

$$(\delta\gamma \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma}$$

3.14. R= (00, 000, 001, 012)

$$(\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \gamma\beta$$

$$(\varepsilon \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ} \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ}$$

$$(\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\delta^\circ} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta)$$

$$(\varepsilon \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta^\circ\varepsilon^\circ} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \gamma\beta \quad (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta^\circ}$$

$$(\gamma\beta \rightarrow \varepsilon\delta) \rightarrow \underline{\delta} \quad (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta}$$

$$(\varepsilon\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ) \rightarrow \varepsilon^\circ \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \underline{\delta\gamma\beta} \quad (\delta^\circ\varepsilon^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta}$$

$$(\gamma\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta} \quad (\delta\gamma\beta \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ \rightarrow \delta\gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta}$$

$$(\delta \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon} \quad (\beta^\circ\gamma^\circ\delta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta\gamma\beta} \quad (\delta^\circ \rightarrow \beta^\circ\gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon\delta}$$

3.15. R = (01, 000, 001, 012)

$(\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ}$	$(\varepsilon \delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ}$	$(\delta^\circ \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ}$
$(\varepsilon \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ}$	$(\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\gamma^\circ}$	$(\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ}$
$(\delta \gamma \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\delta^\circ}$	$(\varepsilon \delta \gamma \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ \varepsilon^\circ}$	$(\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \varepsilon \delta \gamma) \rightarrow \underline{\gamma}$
$(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ \varepsilon^\circ}$	$(\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\gamma}$	$(\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ}$
$(\gamma \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \underline{\delta}$	$(\varepsilon \delta \gamma \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon^\circ}$	$(\gamma^\circ \rightarrow \varepsilon \delta \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma}$
$(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon^\circ}$	$(\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\delta \gamma}$	$(\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta}$
$(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta}$	$(\delta \gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon}$	$(\gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma}$
$(\delta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon}$	$(\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma}$	$(\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta}$

4. Hier sind also die 360 qualitativen Regeln semiotischer CAs, die auf der dyadisch-trichotomischen Zeichenrelation $Z^{2,3} = ((w.x), (y.z))$ mit $w, y \in (1, 2)$ und $(x, z) \in (1, 2, 3)$ gegründet sind. Ferner sieht man sofort, daß es hier die dichotomische Differenz zwischen positivem und negativem Feedback bei weitem nicht ausreicht. Vor allem spielt die Ordnung des Feedbacks innerhalb jeder qualitativen 3er-Gruppe eine Rolle, vgl. etwa

$(\delta \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \boxed{\underline{\varepsilon}}$	$(\gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma}$	$(\delta^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta}$
$(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta}$	$(\delta \gamma \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \boxed{\underline{\varepsilon}}$	$(\gamma^\circ \rightarrow \delta \gamma) \rightarrow \underline{\varepsilon \delta \gamma}$
$(\delta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ}$	$(\varepsilon \delta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ}$	$(\delta^\circ \rightarrow \varepsilon \delta) \rightarrow \boxed{\underline{\gamma^\circ}}.$

Dann gibt es 3er-Gruppen mit Interrelationen zu anderen Gruppen, vgl. etwa

$$\begin{array}{lll}
(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \boxed{\varepsilon^\circ} & (\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\delta\gamma} & (\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\delta} \\
(\varepsilon \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ \varepsilon^\circ} & (\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \delta\gamma) \rightarrow \boxed{\gamma} & (\varepsilon^\circ \rightarrow \gamma^\circ \delta^\circ) \rightarrow \underline{\delta^\circ} \\
(\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ} & (\varepsilon\delta\gamma\beta \rightarrow \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} & (\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \rightarrow \varepsilon\delta\gamma\beta) \rightarrow \boxed{\beta}.
\end{array}$$

Schließlich sei neben vielen anderen, erst zu untersuchenden, Eigenschaften qualitativer semiotischer CAs noch auf die Differenz in der Gradation bzw. Degradation von Feedbacks hingewiesen, vgl. etwa

$$\begin{array}{lll}
(\gamma \rightarrow \beta^\circ \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} & (\beta^\circ \gamma^\circ \rightarrow \beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} & (\gamma^\circ \rightarrow \beta^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} \\
1 & 3 & 2 \\
(\varepsilon \rightarrow \delta^\circ \varepsilon^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ \varepsilon^\circ} & (\delta^\circ \varepsilon^\circ \rightarrow \delta) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ} & (\varepsilon^\circ \rightarrow \delta^\circ) \rightarrow \underline{\beta^\circ \gamma^\circ \delta^\circ} \\
1 & 3 & 2 \\
(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ} & (\gamma\beta \rightarrow \gamma^\circ) \rightarrow \underline{\alpha^\circ \beta^\circ \gamma^\circ} & (\beta^\circ \rightarrow \gamma\beta) \rightarrow \underline{\alpha^\circ} \\
2 & 1 & 3, \text{ usw.}
\end{array}$$

Literatur

- Gardner, Martin, Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "Life". In: Scientific American, vol. 223 (Oct. 1970), S. 120–123
- Toth, Alfred, Polykontexturale semiotische Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019a
- Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Subzeichen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b
- Toth, Alfred, Die Autoreproduktion von Proto- und Deuterozahlen in semiotischen Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c
- Toth, Alfred, Die Morphismen der Proto- und Deutero-semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019d

Toth, Alfred, Kategorientheoretische Darstellung polykontexturaler
semiotischer Automaten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics,
2019e

von Neumann, John/A.W. Burks, Theory of Self-Reproducing Automata.
Urbana, IL, 1966

19.6.2019